4.3.10 Vzorce pro dvojnásobný úhel I

Předpoklady: 040309

Začneme příkladem.

Př. 1: Pomocí součtových vzorců odvoď vzorec pro $\sin 2x$.

$\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2\sin x \cos x$

Př. 2: Pomocí součtových vzorců odvoď vzorec pro $\cos 2x$.

$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Př. 3: Pomocí součtových vzorců odvoď vzorec pro $\operatorname{tg} 2x$.

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x+x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$

Tím jsme získali druhou skupinu vzorců:

Vzorce pro dvojnásobný úhel:

- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$

Př. 4: Otestuj vzorec pro $\sin 2x$ výpočtem $\sin 60°$ z hodnot goniometrických funkcí pro úhel $30°$.

$$\sin 60° = \sin(2\cdot 30°) = 2\sin 30° \cos 30° = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Př. 5: Otestuj vzorec pro $\cos 2x$ pomocí výpočtu $\cos\frac{\pi}{2}$ z hodnot goniometrických funkcí pro úhel $\frac{\pi}{4}$.

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

Př. 6: Vyjádři $\cos 3x$ pomocí $\sin x$ a $\cos x$.

$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - (2\sin x \cos x)\sin x =$
$= \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad byste od rovnosti $\cos 3x = \cos(2x + x) =$ měli nechat studentům na rozmyšlenou. Pro některé není vůbec samozřejmé rozlišit, zda mají použít nejdříve součtový vzorec nebo vzorec pro dvojnásobný úhel. Opět jde o důsledek nedokonalého pochopení funkcí a pořadí početních operací ($\cos(2x + x) =$ vytváří hodnotu z úhlu, který vznikl jako součet dvou úhlů, proto použijeme součtový vzorec. To, že jeden ze sčítaných úhlů vznikl jako dvojnásobek není podstatné, protože se to stalo ještě před sčítáním).

Př. 7: Vyjádři $\sin 3x$ pomocí $\sin x$ a $\cos x$.

$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2\sin x \cos x \cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x =$
$= 2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x$

Postřeh:
Ve vzorcích pro $\sin 2x$ a $\cos 2x$ tvoří pravou stranu členy dávající druhé mocniny goniometrických funkcí, ve vzorcích pro $\sin 3x$ a $\cos 3x$ jsou na pravé straně třetí mocniny. Zřejmě je v tom nějaká zákonitost. Více později v dílu o komplexních číslech.

Př. 8: Urči hodnoty goniometrických funkcí $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$, $\sin 4x$ a $\cos 4x$, jestliže platí $\sin x = \frac{2}{3}$ a $x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Abychom mohli použít vzorce pro dvojnásobný úhel, musíme znát hodnotu $\sin x$ i $\cos x$ $\Rightarrow$ nejdříve určíme $\cos x$: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

V intervalu $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ je $\cos x < 0$ $\Rightarrow$ $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{-\frac{4\sqrt{5}}{9}}{\frac{1}{9}} = -4\sqrt{5}$$

Hodnoty $\sin 4x$ a $\cos 4x$ určíme podle již určených hodnot $\sin 2x$ a $\cos 2x$.

$$\sin 4x = \sin 2(2x) = 2\sin 2x \cos 2x = 2\cdot\left(-\frac{4\sqrt{5}}{9}\right)\frac{1}{9} = -\frac{8\sqrt{5}}{81}$$

$$\cos 4x = \cos 2(2x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \left(\frac{1}{9}\right)^2 - \left(-\frac{4\sqrt{5}}{9}\right)^2 = \frac{1}{81} - \frac{80}{81} = -\frac{79}{81}$$

Pedagogická poznámka: Je zajímavé, že většina studentů má tendenci použít pro výpočet hodnoty $\mathrm{tg}\, 2x$ součtový vzorec pro $\mathrm{tg}(x+x)$, který je podstatně složitější než definiční vzorec $\mathrm{tg}\, 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$. Nejde ani tak o špatné hodnocení situace jako o přebíjení (a zapomínání) všeho předchozího novým. Snažím se k tomu něco podotknout.

Pedagogická poznámka: Následující příklad si zaslouží minimálně 10 minut.

Př. 9: Urči definiční obor výrazů v rovnosti a dokaž její platnost.

a) $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ b) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \mathrm{tg}\, x$

c) $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} = \frac{1-\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}\, x}$

a) $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$

$x \in R$

$1-\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 2\sin^2 x$

$1-\cos^2 x + \sin^2 x = 2\sin^2 x$

$\sin^2 x + \sin^2 x = 2\sin^2 x$

$2\sin^2 x = 2\sin^2 x$

b) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \mathrm{tg}\, x$

- Levá strana: zlomek $\Rightarrow$ nesmíme dělit nulou $\Rightarrow$ $1+\cos 2x \neq 0$ $\Rightarrow$ $\cos 2x \neq -1$ $\Rightarrow$ $2x \neq \pi + k\cdot 2\pi$ $\Rightarrow$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- Pravá strana: $\mathrm{tg}\, x$ $\Rightarrow$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Rightarrow$ $x \in R - \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi\right\}$

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{2\sin x\cos x}{1-\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x + \cos^2 x} = \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

c) $\dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x} = \dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$

- Levá strana: zlomek $\Rightarrow$ nesmíme dělit nulou $\Rightarrow$ $1+\sin 2x \neq 0$ $\Rightarrow$ $\sin 2x \neq -1$ $\Rightarrow$ $2x \neq \frac{3}{2}\pi + k\cdot 2\pi$ $\Rightarrow$ $x \neq \frac{3}{4}\pi + k\pi$
- Pravá strana: $\operatorname{tg} x$ $\Rightarrow$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, nesmíme dělit nulou $1+\operatorname{tg} x \neq 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{tg} x \neq -1$ $\Rightarrow$ $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$$\Rightarrow \; x \in R - \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi; \frac{3}{4}\pi + k\cdot\pi\right\}$$

$$\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1+2\sin x\cos x} = \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$\frac{(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x} = \frac{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}}$$

$$\frac{(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$$

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$$

Př. 10: Petáková:
strana 45, cvičení 49 c)
strana 45, cvičení 50 a)
strana 46, cvičení 51 a), c)
strana 46, cvičení 52 e), j), k), t), z)

Shrnutí: Pomocí součtových vzorců můžeme získat i vzorce pro dvojnásobný úhel.